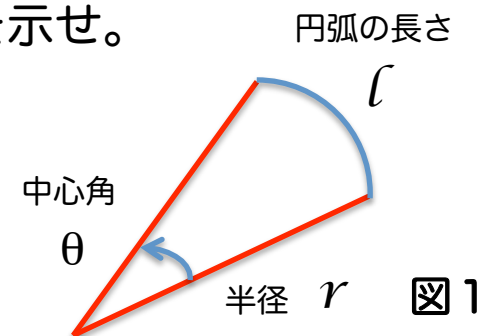


Q1. 図1の扇型において中心角 θ を弧度で表記したとき、
中心角 θ 、円弧の長さ l 、半径 r の関係式を示せ。



A1.

弧度法

中心角を円弧の長さと半径との比として角度を測る方法

$$\theta = \frac{l}{r}$$

弧度法では $l = r$ の時の中心角が1弧度

$\theta = 360^\circ$ の時 $l = 2\pi r$ なので $2\pi = 360^\circ$

1 弧度（ラジアン；radian） = $360^\circ / 2\pi$

Q 3. NMRの共鳴周波数 ω の単位は何か？

A 3. rad/s（角速度）

Q 5. 図2を参考に下記の式を証明せよ。

$$1 + \tan^2 \theta = \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right)$$

A 5. 図2の各辺を $r \cos \theta$ で割ると

$$AB = 1/\cos \theta$$

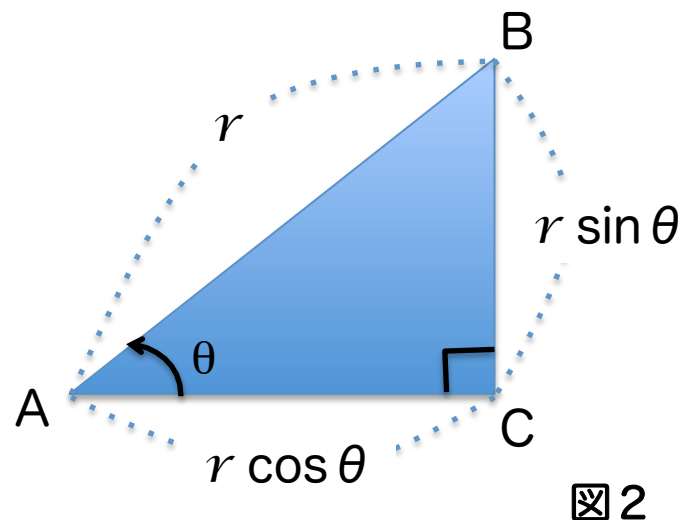
$$AC = 1$$

$$BC = \tan \theta$$

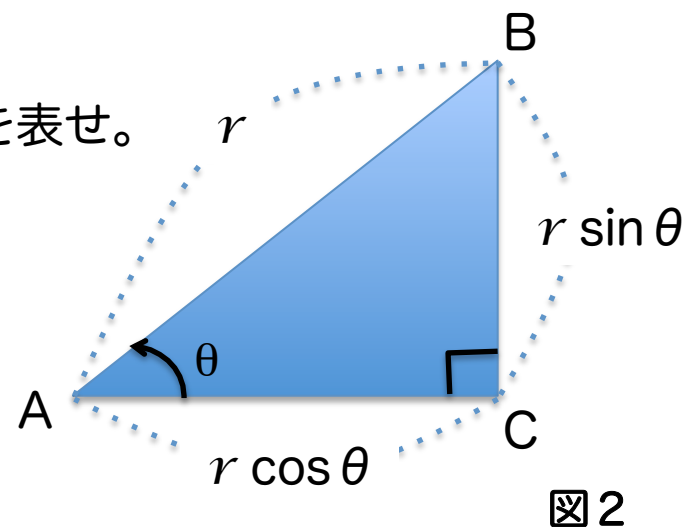
三平方の定理より

$$(AC)^2 + (BC)^2 = (AB)^2$$

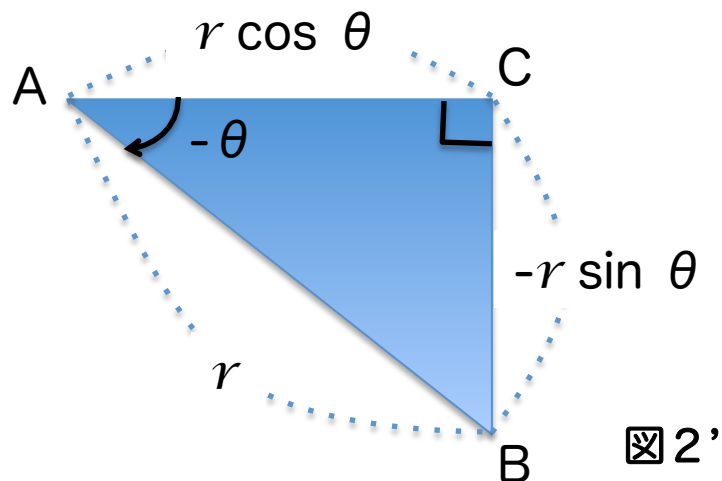
$$1 + \tan^2 \theta = (1/\cos \theta)^2$$



Q7. 図2を参考に $\sin(-\theta)$ と $\sin \theta$ の変換式を表せ。



A7. $-\theta$ を θ の逆回転と見た図2'から $\sin(-\theta) = -\sin \theta$



Q9. $\sin(\alpha + \beta)$ を加法定理で展開せよ。

$$A9. \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$

Q11. $\sin\theta \cos\theta$ に加法定理を適用して 2θ の関数として表示せよ。

$$A11. \sin\text{関数の加法定理において } \alpha = \beta = \theta \text{ とすると}$$
$$\sin(\theta + \theta) = \sin\theta \cos\theta + \cos\theta \sin\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta \cos\theta$$
$$\sin\theta \cos\theta = (1/2) \sin(2\theta)$$

Q13. $\sin^2\theta$ に加法定理を適用して 2θ の関数として表示せよ。

$$A13. \cos\text{関数の加法定理において } \alpha = \beta = \theta \text{ とすると}$$
$$\cos(\theta + \theta) = \cos\theta \cos\theta - \sin\theta \sin\theta$$
$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\cos(2\theta) = (1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta$$
$$\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = (1/2)(1 - \cos(2\theta))$$

Q15. $\sin \alpha \sin \beta$ に加法定理を適用して $\alpha \pm \beta$ の関数として表示せよ。

A 15. \cos 関数に関する加法定理から

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = (1/2) (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Q17. NMR信号は一般に $\exp(i\omega t)$ で表現される。
オイラーの公式を用いて \sin および \cos で表示せよ。

A 17. オイラーの公式

$$\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

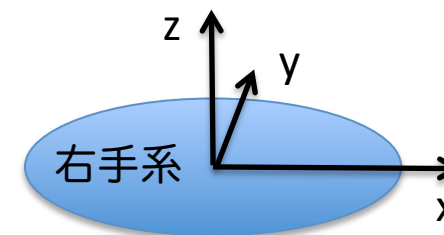
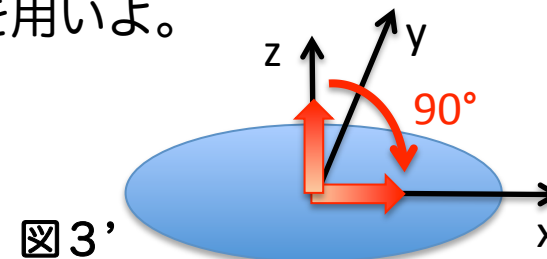


図3

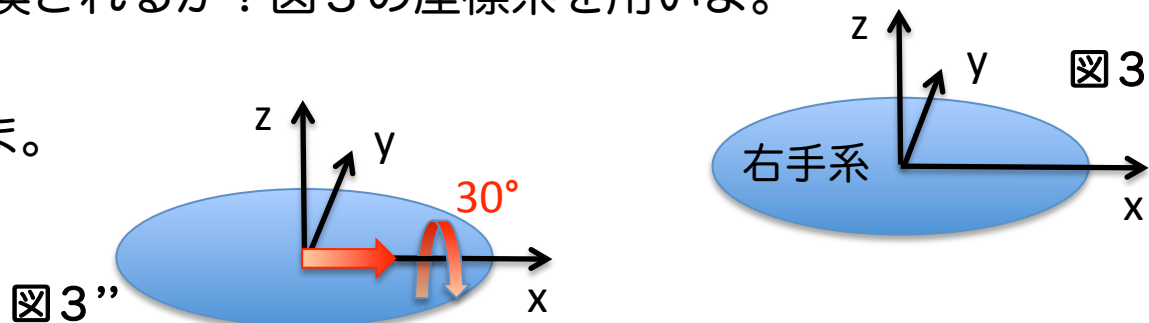
Q19. スピン1/2の直積演算子 I_z に位相 90° (y 軸) で 90° パルスを与えた。
 I_z はどのように変換されるか? 図3の座標系を用いよ。

A 19. 図3'より I_x へ変換される。



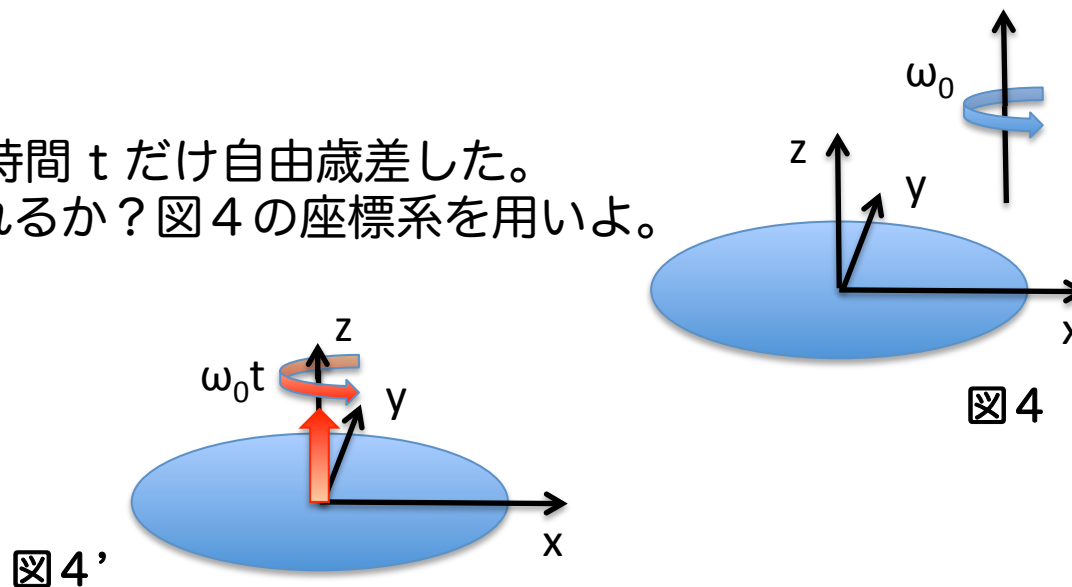
Q21. スピン1/2の直積演算子 I_x に位相 0° (x 軸) で 30° パルスを与えた。
 I_x はどのように変換されるか？図3の座標系を用いよ。

A21. 図3”より I_x のまま。



Q23. I_z が共鳴周波数 ω_0 で時間 t だけ自由歳差した。
 I_z はどのように変換されるか？図4の座標系を用いよ。

A23. 図4'より I_z のまま。



Q25. I_y が共鳴周波数 ω_0 からのオフセット ω_1 で時間 t だけ自由歳差した。
 I_y はどのように変換されるか？図4の座標系を用いよ。

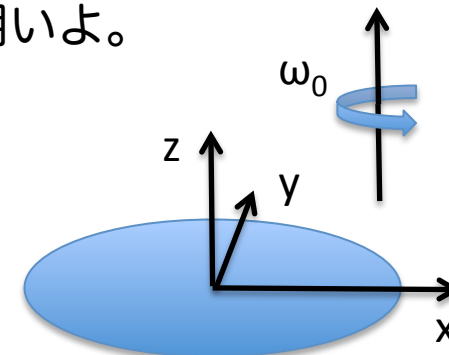


図4

A25. 図4”より $I_y \cos(\omega_0 + \omega_1)t - I_x \sin(\omega_0 + \omega_1)t$

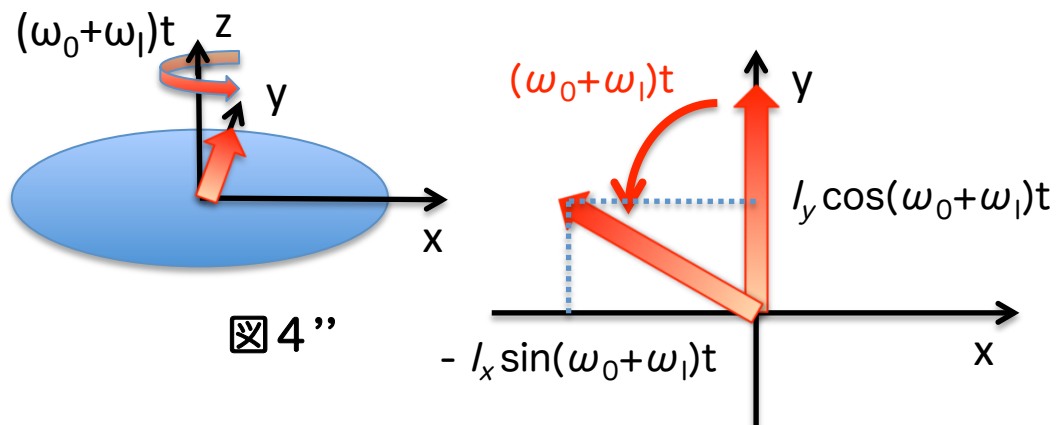


図4''

Q27. I_y が共鳴周波数 ω_0 からのオフセット ω_1 で時間 t だけ自由歳差した。
 検出系は角速度 ω_0 で回転している。
 I_y はどのように検出されるか？図4の座標系を用いよ。

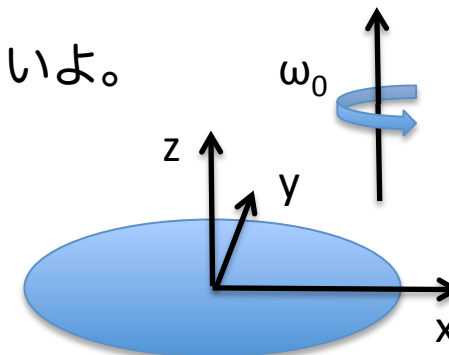


図4

A27. A25より検出系が回転していない場合
 $I_y \cos(\omega_0 + \omega_1)t - I_x \sin(\omega_0 + \omega_1)t$
 検出系が ω_0 で回転している場合、図4'''より
 $I_y \cos\omega_1 t - I_x \sin\omega_1 t$

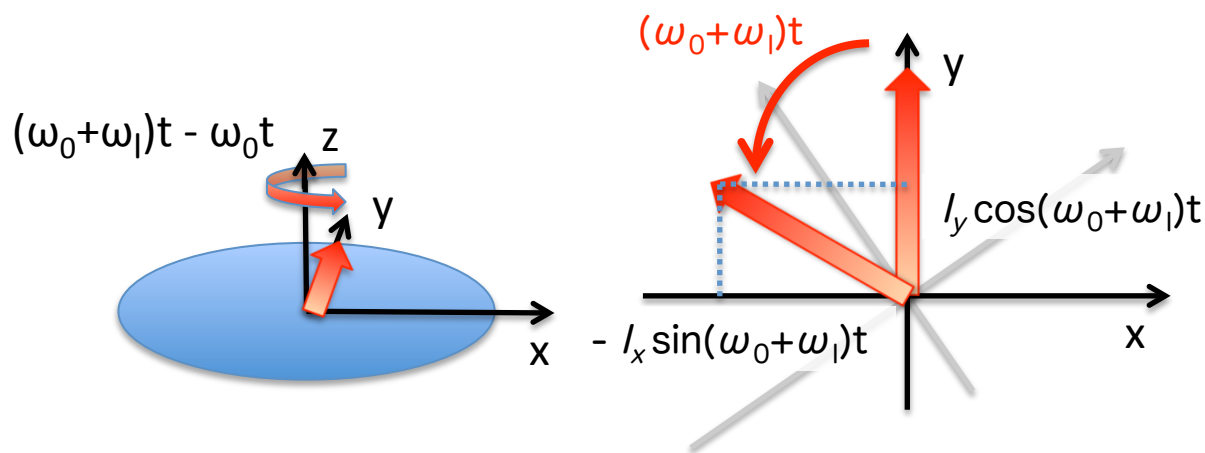
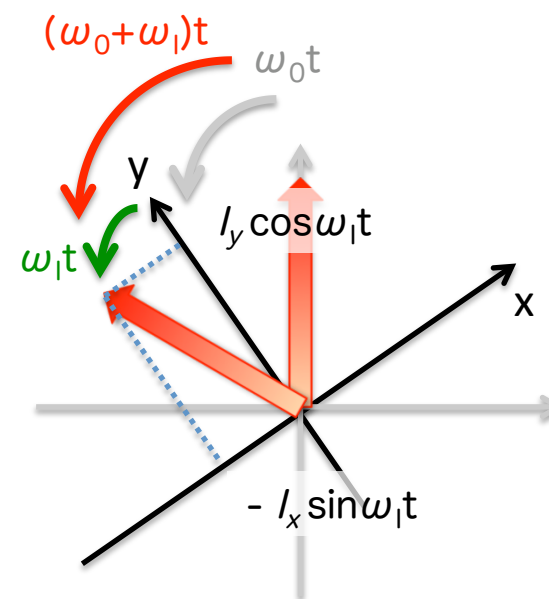
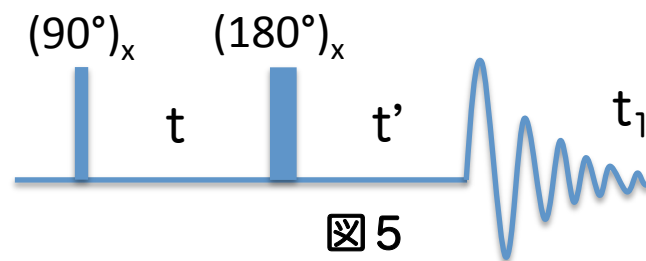


図4'''



Q29. I_z は、図5のパルス系列（ 90°_x - t - 180°_x - t' ）でどのように変換されるか？
 I_z は共鳴周波数 ω_0 で回転している。



A29. I_z
 $(90^\circ)_x \rightarrow -I_y$
 $(t) \rightarrow -I_y \cos\omega_0 t + I_x \sin\omega_0 t$
 $(180^\circ)_x \rightarrow I_y \cos\omega_0 t + I_x \sin\omega_0 t$
 $(t') \rightarrow (I_y \cos\omega_0 t' - I_x \sin\omega_0 t') \cos\omega_0 t + (I_x \cos\omega_0 t' + I_y \sin\omega_0 t') \sin\omega_0 t$
 最終項を整理すると
 $I_y \cos\omega_0 t' \cos\omega_0 t - I_x \sin\omega_0 t' \cos\omega_0 t + I_x \cos\omega_0 t' \sin\omega_0 t + I_y \sin\omega_0 t' \sin\omega_0 t$
 $= I_y (\cos\omega_0 t' \cos\omega_0 t + \sin\omega_0 t' \sin\omega_0 t) + I_x (-\sin\omega_0 t' \cos\omega_0 t + \cos\omega_0 t' \sin\omega_0 t)$
 $= I_y \cos\omega_0 (t-t') + I_x \sin\omega_0 (t-t')$

Q31. Q29において $t = t'$ のとき、 I_z はどのように変換されるか？

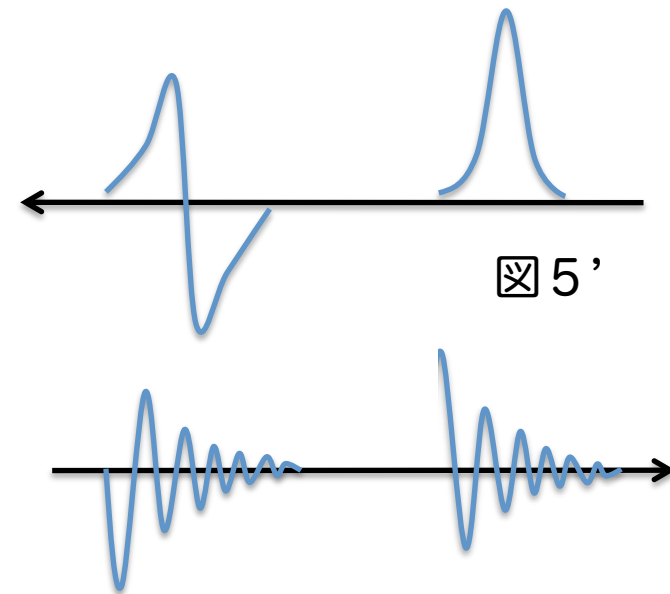
A31. A29において $t = t'$ とおくと I_y が得られる。

Q33. Q31において検出系が位相 0° (x 軸) のときのNMRスペクトルを示せ。
また検出系が位相 90° (y 軸) のときのスペクトルを示せ。

A33. A31から I_y が観測される。
 t_1 期で検出 $\rightarrow I_y \cos \omega_1 t_1 - I_x \sin \omega_1 t_1$

位相 0° (x 軸) で検出
 $-\sin \omega_1 t_1$ 負の分散波形 (図5'左)

位相 90° (y 軸) で検出
 $\cos \omega_1 t_1$ 正の吸収波形 (図5'右)



I_x の係数 = 1核を位相 0° (x 軸) で検出したときの磁化 M_x

I_y の係数 = 1核を位相 0° (y 軸) で検出したときの磁化 M_y